Funkcije više promenljivih - Ekstremumi

November 18, 2019

Definicija

Funkcija $f : D \to \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}^n$ ima ***globalni maksimum*** *u tački $\boldsymbol{x}_0 \in D$ ako za svako $\boldsymbol{x} \in D$ važi $f(\boldsymbol{x}) \leq f(\boldsymbol{x}_0)$.*

Definicija

Funkcija $f : D \to \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}^n$ ima ***globalni minimum*** *u tački $\boldsymbol{x}_0 \in D$ ako za svako $\boldsymbol{x} \in D$ važi $f(\boldsymbol{x}) \geq f(\boldsymbol{x}_0)$.*

Definicija

Funkcija $f : D \to \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}^n$ ima ***lokalni maksimum*** *u tački $\boldsymbol{x}_0 \in D$ ako postoji otvorena kugla L, sadržana u D, sa centrom u $\boldsymbol{x}_0$ tako da za svako $\boldsymbol{x} \in L$ važi $f(\boldsymbol{x}) \geq f(\boldsymbol{x}_0)$.*

Definicija

Funkcija $f : D \to \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}^n$ ima ***lokalni minimum*** *u tački $\boldsymbol{x}_0 \in D$ ako postoji otvorena kugla L, sadržana u D, sa centrom u $\boldsymbol{x}_0$ tako da za svako $\boldsymbol{x} \in L$ važi $f(\boldsymbol{x}) \leq f(\boldsymbol{x}_0)$.*

Teorema

Teorema o egzistenciji
Neka je $D \subseteq \mathbb{R}^n$ kompaktan (zatvoren i ograničen). Ako je $f : D \to \mathbb{R}$ neprekidna na D onda ona dostiže minimum i maksimum na D.

Definicija

*Tačka $\boldsymbol{x}_0$ je **stacionarna tačka** funkcije $f : D \to \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}^n$ ako su svi parcijalni izvodi prvog reda funkcije f u tački $\boldsymbol{x}_0$ jednaki 0, tj.*
$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}_0) = 0, \ \forall i = 1, ..., n.$

Definicija

*Tačke u kojima funkcija nije diferencijabilna zovu se **singularne tačke**.*

Definicija

*Stacionarne i singularne tačke su **kritične tačke**.*

- Teorema o egzistenciji govori samo kada ekstremi postoje, a ne i kako ih naći.
- Kandidati za ekstreme su kritične tačke.

Teorema

Neophodan uslov
Neka je $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ definisana i diferencijabilna na otvorenom skupu D. Ako f u tački $\boldsymbol{x}_0$ dostiže lokalni ekstrem, onda je $\boldsymbol{x}_0$ stacionarna tačka.

Obrnuto ne važi! Primer: sedlasta tačka.

- Da bi pokazali da je stacionarna tačka i ekstrem, moramo koristiti parcijalne izvode drugog reda.

Teorema

Dovoljan uslov

Neka je $f : D \to \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}^n$ *i tačka* $\boldsymbol{x}_0$ *je stacionarna tačka funkcije* f*. Tada:*

- *Ako je* $d^2f(\boldsymbol{x}_0) < 0, (dx_1, ..., dx_n) \neq (0, ..., 0)$ *onda je tačka* $\boldsymbol{x}_0$ *lokalni maksimum funkcije* f*.*
- *Ako je* $d^2f(\boldsymbol{x}_0) > 0, (dx_1, ..., dx_n) \neq (0, ..., 0)$ *onda je tačka* $\boldsymbol{x}_0$ *lokalni minimum funkcije* f*.*
- *Ako* $d^2f(\boldsymbol{x}_0)$ *menja znak onda tačka* $\boldsymbol{x}_0$ *nije ekstrem.*

Teorema

Dovoljan uslov *(važi samo za funkciju dve promenljive)*
Neka je $f : D \to \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}^2$, *tačka* $\boldsymbol{x}_0 = (x_0, y_0)$ *je stacionarna tačka funkcije* f *i* $\triangle(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) - (\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0))^2$. *Tada:*

- *Ako je* $\triangle > 0$ *onda funkcija* f *ima lokalni ekstrem i tački* $\boldsymbol{x}_0$ *i to:*
  - a) *Ako je* $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0$ *onda je* $\boldsymbol{x}_0$ *lokalni minimum.*
  - b) *Ako je* $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) < 0$ *onda je* $\boldsymbol{x}_0$ *lokalni maksimum.*
- *Ako je* $\triangle < 0$ *onda funkcija* f *nema lokalni ekstrem i tački* $\boldsymbol{x}_0$
- *Ako je* $\triangle = 0$ *ovaj kriterijum ne daje odgovor.*

Kvadratna forma

Definicija

Realna funkcija n realnih promenljivih $\Phi(x_1, ..., x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$ *zove se **kvadratna forma** promenljivih* $x_1, ..., x_n$.
Matrica $[a_{ij}]_{n\times n}$ *je **matrica kvadratne forme*** Φ.

Definicija

Kvadratna forma Φ *je:*

- ***pozitivno semidefinitna** ako je* $\Phi(x_1, ..., x_n) \geq 0, \ \forall(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$.
- ***negativno semidefinitna** ako je* $\Phi(x_1, ..., x_n) \leq 0, \ \forall(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$.
- ***pozitivno definitna** ako je* $\Phi(x_1, ..., x_n) > 0, \ \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.
- ***negativno definitna** ako je* $\Phi(x_1, ..., x_n) < 0, \ \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.

Teorema

Silvesterova teorema

Kvadratna forma Φ je pozitivno definitna akko su glavni minori njene matrice pozitivni, a negativno definitna akko su glavni minori njene matrice naizmeničnog znaka počev od negativnog.

Podsećanje: glavni minori su:

$$M_1 = |a_{11}|, M_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, ..., M_n = \det([a_{ij}]).$$

Teorema

Dovoljan uslov

Ako je tačka $\boldsymbol{x}_0$ stacionarna tačka funkcije $f : D \to \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}^n$, D otvoren skup, f dva puta neprekidno diferencijabilna ($f \in C^2(D)$) i $a_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\boldsymbol{x}_0)$, tada:

- *Ako je kvadratna forma Φ pozitivno definitna u $\boldsymbol{x}_0$ je (lokalni) minimum.*
- *Ako je kvadratna forma Φ negativno definitna u $\boldsymbol{x}_0$ je (lokalni) maksimum.*
- *Ako je kvadratna forma Φ promenljivog znaka u $\boldsymbol{x}_0$ nema ekstremuma.*

Matrica $H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$ zove se **Hesijan**.

Ekstremalni problemi sa ograničenjima/Uslovni ekstremumi/Vezani ekstremumi

Neka je data funkcija $f : D \to \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}^n$, D otvoren skup.
Neka su pored toga date i funkcije $f_i : D \to \mathbb{R}, i = 1, ..., s,\ s < n$.

Zadatak: Naći ekstemume funkcije f pri čemu su promenljive vezane nekim uslovom:
$f(x_1, ..., x_n) \to \min / \max$
pri uslovima:
$f_i(x_1, ..., x_n) = 0, i = 1, ..., s$.

Primer na času.

Neka je $B = \{\mathbf{x} \in D | f_i(\mathbf{x}) = 0, i = 1, ..., s\}$. Za skup B kažemo da je određen uslovima $f_i(\mathbf{x}) = 0, i = 1, ..., s$.

Definicija

Funkcija $f : D \to \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}^n$ u tački $\boldsymbol{x}_0 \in B$ ima ***globalni maksimum pri uslovima*** $f_i(x) = 0, i = 1, ..., s$ *ako za svako $\boldsymbol{x} \in B$ važi $f(\boldsymbol{x}) \leq f(\boldsymbol{x}_0)$.*

Slično se definišu i globalni minimum, kao i lokalni minimum i lokalni maksimum pri datim uslovima.

Jedan metod za određivanje uslovnog ekstremuma je izražavanje nekih promenljivih x_j iz datog sistema $f_i(x) = 0, i = 1, ..., s$ pomoću ostalih promenljivih.

Jedan od nedostataka ovog pristupa je što u nekim slučajevima dolazi do komplikovanih izvođenja.

Ovaj nedostatak se otklanja primenom **Lagranžovog metoda**.

Teorema

Lagranžova teorema

Neka je dat problem

P: $f(x_1, ..., x_n) \to \min / \max$

pri uslovima:

$f_i(x_1, ..., x_n) = 0, i = 1, ..., s,$

$f : D \to \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}^n, f_i : D \to \mathbb{R}, i = 1, ..., s,\ s < n.$

Neka je D otvoren skup i funkcije $f, f_i, i = 1, ..., s$ *su glatke* $(f, f_i \in C(D))$*. Ako je tačka* $\hat{\boldsymbol{x}}$ *lokalno rešenje razmatranog problema P i ako je rang*$(f'(\hat{\boldsymbol{x}})) = n$ *onda postoje brojevi* $\hat{\lambda}_1, ..., \hat{\lambda}_s \in \mathbb{R}$ *takvi da je* $\hat{\boldsymbol{x}}$ *stacionarna tačka funkcije* $L(\boldsymbol{x}, \lambda) = f(\boldsymbol{x}) + \hat{\lambda}_1 f_1(\boldsymbol{x}) + ... + \hat{\lambda}_s f_s(\boldsymbol{x})$.

$\hat{\lambda}_1, ..., \hat{\lambda}_s \in \mathbb{R}$ se nazivaju **Lagranžovi množioci**.
$L(\mathbf{x}, \lambda)$ se naziva **Lagranžova funkcija** (Lagranžijan).